

Um uns der Beantwortung der Fragen *Wann ist ein Beweis richtig? Wann ist ein Beweis falsch?* zu nähern, werden im Folgenden zwei Beweisversuche für den Satz des Pythagoras zweier Schüler:innen betrachtet.

Satz des Pythagoras

Ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Kathetenlängen a und b sowie der Hypotenusenlänge c gegeben, dann gilt

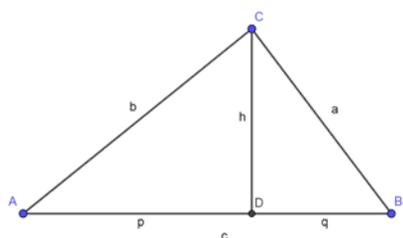
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Aufgabenstellung

1. Gib die beiden untenstehenden Beweisversuche von Chris und Kim in deinen eigenen Worten wieder.

Beweisversuch von Chris, 9. Klasse

Betrachte ein beliebiges Dreieck ABC mit rechtem Winkel bei C. Ist D der Schnittpunkt der Höhe über \overline{AB} mit c, dann entstehen zwei neue Dreiecke, nämlich ADC und DBC.



Die drei Dreiecke ABC, ADC und DBC sind ähnlich nach dem WWW-Ähnlichkeitssatz. Dann folgt

$$\frac{b}{p} = \frac{c}{b} \Leftrightarrow b^2 = cp$$

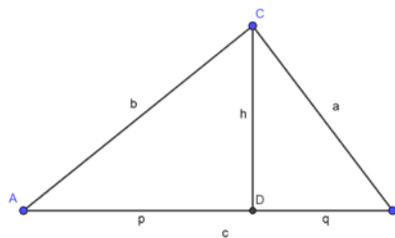
$$\frac{a}{q} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow a^2 = cq.$$

Damit folgt durch Addition und Ausklammern $a^2 + b^2 = cq + cp = c \cdot (q + p) = c \cdot c = c^2$.

Damit ist der Satz des Pythagoras bewiesen.

Beweisversuch von Kim, 12. Klasse

Betrachte ein beliebiges Dreieck ABC mit rechtem Winkel bei C. Ist D der Schnittpunkt der Höhe über \overline{AB} mit c, dann entstehen zwei neue Dreiecke, nämlich ADC und DBC.



Die drei Dreiecke ABC, DBC und ADC sind ähnlich und es folgt

$$b^2 = cp$$

und

$$a^2 = cq.$$

Damit folgt durch Addition und Ausklammern $a^2 + b^2 = cq + cp = c \cdot (q + p) = c \cdot c = c^2$.

Damit ist der Satz des Pythagoras bewiesen.

2. Überprüfe, ob die beiden Beweisversuche den in den letzten Stunden erarbeiteten Kriterien für gültige mathematische Beweise entsprechen und **entscheide begründet**, ob beide Beweisversuche gültig sind.

- Der Beweis nutzt keine Beispiele und auch keine Argumente aus Schulbüchern.
- Der Beweis nutzt nicht die Behauptung als Argument.
- Der Beweis nutzt keine noch nicht bewiesenen Aussagen.

Folglich gibt es keinen Grund zu sagen, dass der Beweisversuch von Chris ein **ungültiger Beweis** ist.

- Der Beweis nutzt keine Beispiele und auch keine Argumente aus Schulbüchern.
- Der Beweis nutzt nicht die Behauptung als Argument.
- Der Beweis nutzt keine noch nicht bewiesenen Aussagen.

Folglich gibt es keinen Grund zu sagen, dass der Beweisversuch von Kim ein **ungültiger Beweis** ist.

3. Nenne Unterschiede der beiden Beweisversuche von Chris und Kim.

Der linke Beweisversuch ist ausführlicher als der rechte Beweisversuch (es gibt mehr Zwischenschritte)
→ Kims Beweisversuch weist größere Lücken auf als der Beweisversuch von Chris.

4. Notiere die Ergebnisse, die ihr als Klasse gemeinsam diskutiert und formuliert habt.

Wann ein Beweis richtig ist, können wir nicht pauschal sagen, das hängt von unserem Vorwissen ab und bei welchen Aussagen wir akzeptieren, dass sie nicht extra bewiesen werden.

Wir können aber sagen, dass ein Beweis klar falsch ist, bspw. wenn er Beispiele, Aussagen aus Schulbüchern, unbewiesene Aussagen oder die Behauptung einer Aussage als Argumente nutzt.

Sobald ein solcher „Fehler“ im Beweis ist, ist die gesamte Begründung nicht als „gültiger mathematischer Beweis“ zu bewerten (Ein solcher Fehler ist bspw. ein Zirkelschluss.) Es gibt also ein „definitiv falsch“ aber kein „definitiv richtig“.