Betrachte die folgende mathematische Aussage (Gauß'sche Summenformel).

Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

Aufgabenstellung

1. Bestimme die Voraussetzung und Behauptung der Aussage.

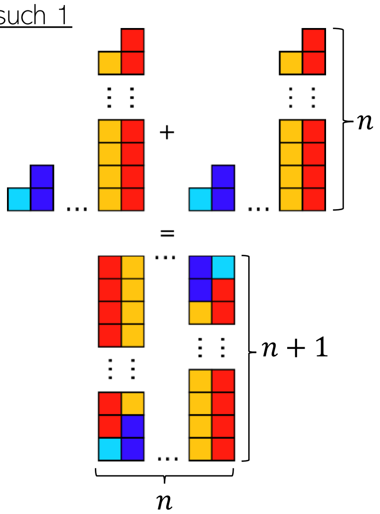
Wenn n eine natürliche Zahl ist ______________________ (Voraussetzung),

dann ist $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ______________________ (Behauptung).

2. Gib die drei untenstehenden Beweisversuche in eigenen Worten wieder.

3. Stellen alle drei Beweisversuche korrekte Beweise dar? Begründe deine Einschätzung.

Beweisversuch 1



Die beiden obigen Figuren stellen die Summe

$$1 + 2 + \cdots + n$$

dar.

Das untere Rechteck entsteht, wenn ich die rechte Figur drehe und auf die linke setze. Dann hat das untere Rechteck die Kantenlänge n beziehungsweise $(n + 1)$.

Das Doppelte von $1 + 2 + \cdots + n$ ergibt also $n \cdot (n + 1)$.

Damit ist die Aussage beweisen.

Beweisversuch 2

Wir überprüfen die Aussage für eine beliebige Zahl z.B. für 4 und eine Primzahl, etwa 11.

Für 4 gilt

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10 = \frac{4 \cdot 5}{2}.$$

Auch für 11 gilt

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 66 = \frac{11 \cdot 12}{2}.$$

Damit ist die Aussage für alle n bewiesen.

Beweisversuch 3

Wir können die Summe wie folgt umschreiben:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n$$

$$= (1 + n) + (2 + n - 1) + (3 + n - 2) + \cdots.$$

$$= (n + 1) + (n + 1) + (n + 1) + \cdots.$$

Dann haben wir die Anzahl der Summanden von n Summanden halbiert und erhalten schließlich

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Damit ist die Aussage beweisen.

Aufgabe 2:

Im ersten Beweisversuch wird die Summe mit Kästchen dargestellt und zwei dieser Kästchentreppen so zusammengefasst (addiert), dass man ein Rechteck der Kantenlängen n und (n+1) erhält. Es gibt also n*(n+1) Kästchen in diesem Rechteck und um die Summe 1+2+…+n zu erhalten, teilt man die Anzahl der Kästchen durch 2.

Im zweiten Beweisversuch probiert man die Gleichung für zwei Zahlen aus. Für diese gilt die Formel, weswegen auf die Korrektheit der Aussage für alle natürlichen Zahlen geschlossen wird.

In Beweisversuch fasst man jeweils 2 Summanden zu (n+1) zusammen und halbiert so die Anzahl der Summanden zu n/2, wodurch sich die Formel ergibt.

Betrachte die folgende mathematische Aussage (Gauß'sche Summenformel).

Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$.

Aufgabenstellung

1. Bestimme die Voraussetzung und Behauptung der Aussage.

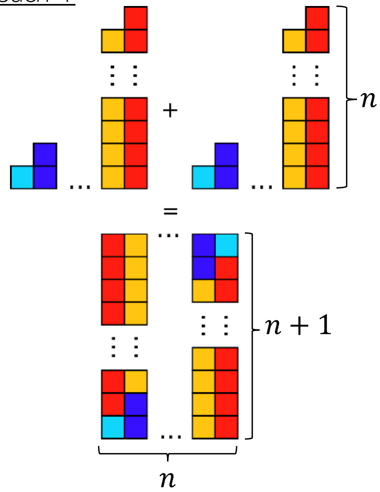
Wenn n eine natürliche Zahl ist ______________________________ (Voraussetzung),

dann ist $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ______________________________ (Behauptung).

2. Gib die drei untenstehenden Beweisversuche in eigenen Worten wieder.

3. Stellen alle drei Beweisversuche korrekte Beweise dar? Begründe deine Einschätzung.

Beweisversuch 1



Die beiden obigen Figuren stellen die Summe

$$1 + 2 + \cdots + n$$

dar.

Das untere Rechteck entsteht, wenn ich die rechte Figur drehe und auf die linke setze. Dann hat das untere Rechteck die Kantenlänge n beziehungsweise $(n+1)$.

Das Doppelte von $1 + 2 + \cdots + n$ ergibt also $n \cdot (n+1)$.

Damit ist die Aussage beweisen.

Beweisversuch 2

Wir überprüfen die Aussage für eine beliebige Zahl z.B. für 4 und eine Primzahl, etwa 11.

Für 4 gilt

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10 = \frac{4 \cdot 5}{2}.$$

Auch für 11 gilt

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 66 = \frac{11 \cdot 12}{2}.$$

Damit ist die Aussage für alle n bewiesen.

Beweisversuch 3

Wir können die Summe wie folgt umschreiben:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n$$

$$= (1+n) + (2+n-1) + (3+n-2) + \cdots.$$

$$= (n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots.$$

Dann haben wir die Anzahl der Summanden von n Summanden halbiert und erhalten schließlich

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Damit ist die Aussage beweisen.

Aufgabe 3:

Der erste Beweisversuch stellt einen korrekten Beweis dar. Hier wird ein ikonischer Beweis für die Korrektheit der Aussage geliefert.

Der zweite Beweisversuch stellt keinen validen Beweis dar, da Beweise Aussagen im Allgemeinen zeigen müssen und nicht nur für einige Beispiele.

Der dritte Beweisversuch stellt ebenfalls keinen validen Beweis dar. Grundsätzlich kann ein solcher Ansatz zu einem validen Beweis ausgearbeitet werden, hier fehlen aber die Fallunterscheidungen, dass n gerade bzw. ungerade ist.