

Um uns der Beantwortung der Fragen *Wann ist ein Beweis richtig? Wann ist ein Beweis falsch?* zu nähern, wird im Folgenden ein gültiger und ein ungültiger Beweis für den Satz des Pythagoras betrachtet.

### Satz des Pythagoras

Ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Kathetenlängen a und b sowie der Hypotenusenlänge c gegeben, dann gilt

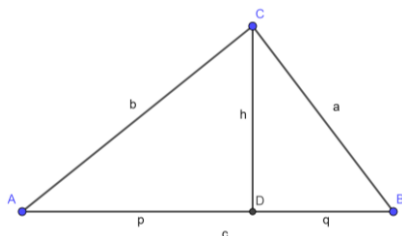
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

### Aufgabenstellung

1. **Gib** die beiden untenstehenden Beweise in eigenen Worten **wieder**.
2. **Formuliere** eine Regel, die vorgibt, welche Art von Argumenten in einem mathematischen Beweis nicht zugelassen sind.

#### Gültiger Beweis

Betrachte ein beliebiges Dreieck ABC mit rechtem Winkel bei C. Ist D der Schnittpunkt der Höhe über C mit der Strecke  $\overline{AB}$ , dann entstehen zwei neue Dreiecke, nämlich ADC und DBC.



Die drei Dreiecke ABC, DBC und ADC sind ähnlich nach dem WWW-Ähnlichkeitssatz. Dann folgt

$$\frac{a}{q} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow a^2 = cq$$

$$\frac{b}{p} = \frac{c}{b} \Leftrightarrow b^2 = cp$$

Damit folgt durch Addition und Ausklammern

$$a^2 + b^2 = cq + cp = c \cdot (q + p) = c \cdot c = c^2.$$

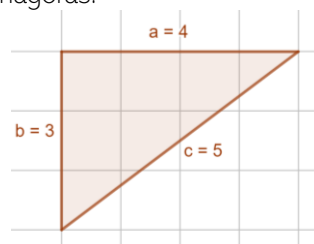
Damit ist der Satz des Pythagoras bewiesen.

#### Ungültiger Beweis

Betrachte zwei rechtwinklige Dreiecke.

Das erste Dreieck hat die Kathetenlängen 3 cm und 4 cm. Für die Hypotenuse ergibt sich aus der Grafik die Länge von 5 cm.

Es gilt  $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$ , also der Satz des Pythagoras.



Das zweite Dreieck hat die Kathetenlängen 5 cm und 12 cm. In diesem Fall ergibt sich aus einer entsprechenden Grafik eine Länge von 13 cm für die Hypotenuse.

Es gilt der Satz des Pythagoras, denn es ist  $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$ .

Damit ist der Satz des Pythagoras bewiesen.

#### Regel 1 (Ungültige Argumente für mathematische Beweise)

„In einem mathematischen Beweis dürfen Beispiele nicht als Argumente genutzt werden.“

oder

„Für die meisten mathematischen Beweise reichen Beispiele als Argumente nicht aus.“

**ACHTUNG!** Es gibt Situationen, in denen Beispiele für einen gültigen Beweis ausreichen.

3. **Beschreibe** mathematische Aussagen, für die Beispiele als Beweis ausreichen.

Wird in einer mathematischen Aussage die Existenz eines Objektes beschrieben, dann reicht es aus als Beweis der Aussage ein entsprechendes Beispiel anzugeben.

Beispiel:

Es existieren Dreiecke mit der Winkelgröße  $60^\circ$  für alle Winkel.

Beweis:

Man betrachte das Dreieck mit den Seitenlänge 1 cm, 1 cm und 1 cm, dann sind alle Innenwinkel  $60^\circ$  groß.