IPN - Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik, Kiel

Unterrichtseinheit zur Förderung des Beweisverständnisses von Schüler:innen im 9. Jahrgang

Teil 2

Kriterien 1: Beispiele und höhere Autorität

Dr. Femke Sporn

Prof. Dr. Aiso Heinze

Prof. Dr. Daniel Sommerhoff

Benötigte Materialien

- 1_AB21_BeweiseBeispiele_Pyth
- 1_AB21_BeweiseBeispiele_Pyth_Loesung
- 2_PPP_Subjektive Ueberzeugung vs Validitaet
- 3_AB22_BeweiseHoehereAutoritaet_Pyth
- 3_AB22_BeweiseHoehereAutoritaet_Pyth_Loesung
- 4_AB23_HABeweisIkonisch_Pyth
- 4_AB23_HABeweisIkonisch_Pyth_Loesung

Zentrale Inhalte der Unterrichtsstunde (45 Minuten)

In dieser zweiten Unterrichtsstunde wird erarbeitet, dass Beispiele sowie Bezüge auf höhere Autorität (Lehrkraft/Mathematikbuch) als Argumente für einen gültigen mathematischen Beweis unzulässig sind. Weiter wird thematisiert, dass dennoch nicht gültige Argumente (z. B. Beispiele) durchaus überzeugend wirken können und die individuelle Sicherheit, dass eine Aussage korrekt ist, vergrößern.

Lernziele: Die Schüler:innen

… nennen die Verwendung von Beispielen als Kriterium dafür, dass Beweisversuche ungültig sind, sofern es sich nicht um Existenzaussagen handelt.

… nennen die Verwendung von Argumenten auf Basis höherer Autorität (Lehrkraft, Schulbuch etc.) als unzulässige Argumente in einem mathematischen Beweis.

… beschreiben, dass auch ungültige Beweisversuche subjektiv überzeugend sein können.

Verlaufsplanung

Zeit*	**Phase Sozialform**	**L-S-Aktivitäten / Handlungsverlauf**	**Medien/ Materialien**	**Anmerkungen**
4	Begrüßung, Wiederholung und Einleitung			
1	UG	L und S organisieren sich. Ggf. kurzer Hinweis darauf, dass wir uns nun in der zweiten der vier Stunden zu Beweisen befinden.		Ein schneller Beginn ist erwünscht.
2	UG	Die Ergebnisse aus der ersten Unterrichtsstunde der Einheit werden zusammengefasst, indem das Plakat vorgestellt wird (Grundlage ist das Tafelbild aus der letzten Stunde). S wiederholen die Ergebnisse in eigenen Worten.	Plakat (ggf. PPP mit den Ergebnissen)	vgl. gelbe und blaue Karten Bei Bedarf kann auch eine PPP genutzt werden. Hier sind die Ergebnisse ebenfalls gesichert.
1	UG	L stellt die zentralen Fragestellungen für die kommende(n) Stunden vor: *„Wann ist ein Beweis richtig? Wann ist ein Beweis falsch?“* Fragen auf Plakat kleben	Plakat/ ggf. PPP	Grüne (*Wann ist ein Beweis richtig?)* und rote (*Wann ist ein Beweis falsch?)* Karte auf dem Plakat ergänzen
5	**Satz des Pythagoras**			
3	UG	L (sinngemäß): *„Um der Beantwortung dieser Fragen näher zu kommen, wird der Satz des Pythagoras genutzt.“* Satz des Pythagoras wird wiederholt, indem die S den Satz formulieren. Wird an der Tafel festgehalten. S wiederholen mündlich die Anwendungsmöglichkeiten.	Tafel	Mögliche Fragestellung: *„Wozu kann der Satz des Pythagoras verwendet werden?“*
2	EA (UG)	L erinnert an den Aufbau mathematischer Aussagen aus Voraussetzung und Behauptung. S bestimmen die Voraussetzung und Behauptung des Satzes von Pythagoras. Dies wird kurz im Plenum gesammelt.	Tafel	Voraussetzung: Rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c. Behauptung: $a^2 + b^2 = c^2$
1	UG	L fragt, ob der Satz des Pythagoras aus mathematischer Sicht jetzt genutzt werden kann. S sollen vor dem Hintergrund der ersten Doppelstunde argumentieren, dass ein Beweis des Satzes notwendig ist.		Bei Bedarf Erinnerung an den Beweis, der bereits im Zusammenhang mit dem Pythagoras im Unterricht geführt wurde.
15	**Korrekte und falsche Beweise – Satz des Pythagoras**			
1	UG	L verteilt AB 2.1 (Korrekter und falscher Beweis) zum Satz des Pythagoras und erklärt die Aufgabenstellungen.	AB 2.1	Korrekter Beweis ist symbolisch und rein formal. Falscher Beweis ist „Beweis“ durch Beispiele.

10	PA	S bearbeiten die Aufgaben (1 und 2 auf der Vorderseite).	AB 2.1	Beweise sollen überprüft werden und an den Beweisen soll diskutiert werden, dass Beispiele nicht ausreichen, um die Allgemeingültigkeit einer Aussage zu zeigen. SuS formulieren dies als Regel. **Hinweis zum Plakat**: Ergebnisse sind die Grundlage für das Plakat zu Beginn der dritten Unterrichtsstunde (vgl. rote Karte *Plakat_Struktur*)
4	UG Ggf. TPS	L sammelt die Ergebnisse im Plenum. Regel wird an der Tafel festgehalten. (Sinngemäß „Die Angabe einzelner Beispiele reicht nicht aus, um eine mathematische Aussage allgemeingültig zu beweisen.“) L fordert S auf, sich eine Situation zu überlegen, in der die Angabe eines Beispiels als Beweis genügt. (Aufgabe 3 auf Rückseite des AB)	AB 2.1 Tafel AB 2.1	 **ACHTUNG**: Lücke in Aufgabenstellung (→*Beispiele*), damit hier nicht die Regel für vorherige Aufgabe einfach abgeleitet werden kann. Muss also noch ergänzt werden, bevor die Aufgabe bearbeitet werden kann. Existenzaussagen Das Ergebnis der Diskussion kann auf dem AB vermerkt werden.
20	**Subjektive Überzeugung vs. Validität eines Beweises**			
5	UG	L (sinngemäß): *„Wir schauen uns nun nochmal die beiden Beispiele von AB 2.1 (formal und beispielgebunden) an und unabhängig davon, was wir gerade gesehen haben, überlegen wir, ob wir – ausschließlich basierend auf dem Beweis - glauben, dass die Aussage stimmt.“* Abstimmung via Daumenbarometer o. Ä. zu „Glaubst du (auf Grundlage des • symbolisch-formalen Beweises) • Überzeugung durch beispielgebundenen Beweis),	PPP Folie 2 Folien 3 & 4	Ziel: Obwohl Beispiele i.A. keinen gültigen Beweis darstellen, können diese durchaus überzeugend wirken und die individuelle Sicherheit, dass eine Aussage korrekt ist, vergrößern.

		dass der Satz des Pythagoras stimmt?“ L (sinngemäß): Wir haben hier also gesehen, dass Beispiele meistens nicht ausreichen, wenn wir eine mathematische Aussage beweisen wollen. Trotzdem können Beispiele helfen, dass wir glauben, dass die Aussage stimmt. Stellen wir uns zum Beispiel mal vor, dass wir zu einer mathematischen Aussage 3, 10 oder auch 1000 Beispiele sehen, für welche die Aussage korrekt wäre. Dann kann uns das schon davon überzeugen, dass die Aussage gültig sein muss. Wir glauben also ggf., dass das stimmt, auch wenn wir uns aus streng mathematischer Sicht trotzdem nicht ganz sicher sein können. (Denn wir wissen ja, dass es dafür eigentlich einen mathematischen Beweis braucht UND dass Beispiele für einen mathematischen Beweis nicht ausreichen, da es ja immer irgendeinen Spezialfall geben könnte, wo es plötzlich nicht klappt.) Das ist das, was wir im Mathematikunterricht häufig wollen (*Überzeugt sein/Glauben, dass die Aussage korrekt ist*). Es würde einfach den Rahmen sprengen, jedes Mal einen ausführlichen korrekten mathematischen Beweis zu führen. Es ist häufig einfach wichtig, dass wir von der Gültigkeit der Aussage überzeugt sind, damit wir einen ausreichenden Grund haben, die Aussage dann im Unterricht verwenden zu können. Trotzdem dürfen wir aber nicht vergessen, dass es da eigentlich noch einen mathematischen Beweis braucht.	Folie 5	Hinweis: Auf die Frage „Wie viele Beispiele brauche ich, um generell zu werden?“ ist die korrekte Antwort „Wir werden mithilfe von Beispielen niemals generell werden können.“
2	UG	Weitere Abgrenzung zwischen überzeugendem und validem Argument durch „höhere Autorität“ als Argument. L (sinngemäß): *„Wir wollen nun schauen, bei welchen Argumenten wir noch vorsichtig sein müssen, wenn das Ziel ist, einen gültigen mathematischen Beweis zu formulieren.“* L teilt AB 2.2 aus.	AB 2.2	

8	EA/PA	S bearbeiten AB 2.2. S arbeiten die genutzten Argumente heraus. S arbeiten heraus, was für und gegen die Argumente spricht.	AB 2.2	Es werden zwei Beweisversuche vorgestellt, die als Argument eine höhere Autorität heranziehen (Mathebuch und Lehrkraft). Dagegen: nicht zugelassen als allgemeingültiges Argument in einem korrekten mathematischen Beweis
5	UG	Sicherung AB 2.2 L vergleicht die Ergebnisse der S im Plenum. Dies soll als Regel an der Tafel formuliert werden. (Sinngemäß „Der Verweis auf die Lehrkraft oder das Mathematikbuch reicht nicht aus, um eine mathematische Aussage allgemeingültig zu beweisen.“)	AB 2.2 Tafel	Ziel: Die Aussagen höherer Autoritäten können zwar überzeugend sein, wenn wir aber einen „korrekten mathematischen Beweis“ führen, sind höhere Autoritäten nicht als Argument zugelassen. Hinweis: auch hier kann gerne nochmal betont werden, dass es nur dann problematisch wird, wenn man einen korrekten mathematischen Beweis führen soll. **Hinweis zum Plakat**: Ergebnisse dieser Sicherung ist die Grundlage für das Plakat zu Beginn der dritten Unterrichtsstunde (vgl. rote Karte *Plakat_Struktur*)
1	**Abschluss und Hausaufgabe**			
1	UG	L schließt (sinngemäß): *„Wir haben gesehen, dass es Argumente gibt, die für einen mathematischen Beweis nicht zugelassen sind. Beweise mit solchen Argumenten, kann man also sehr schnell als falsch identifizieren. Welche anderen Fälle es zu berücksichtigen gibt und wann ein Beweis als richtig interpretiert werden kann, schauen wir in den nächsten Stunden an.“* L teilt die Hausaufgabe mit.	AB 2.3 (Hausaufgabe)	Bei Bedarf Bezug zur übergeordneten Frage: „Wann ist ein Beweis richtig? Wann ist ein Beweis falsch?“

Abkürzungen: UG = Unterrichtsgespräch, EA/PA/GA = Einzel-/Partner-/Gruppenarbeit, S = Schüler:innen, L = Lehrkraft, TPS = Think-Pair-Share, PPP = Power-Point-Präsentation