IPN - Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik, Kiel

# Unterrichtseinheit zur Förderung des Beweisverständnisses von Schüler:innen im 9. Jahrgang

## Teil 1

Allgemeine Betrachtung von Beweisen
im Fach Mathematik

**Dr. Femke Sporn**

**Prof. Dr. Aiso Heinze**

**Prof. Dr. Daniel Sommerhoff**

**Benötigte Materialien**

Zu dem Materialpaket für diese Unterrichtsstunde gehören:

- 1_PPP für Einstieg
- 1_Einstieg_Instruktionsvideo Beweise
- 1_AB11_Einstieg zum Video (AB 1.1)
- 2_AB12_mathematische Aussagen (AB 1.2)
- 2_AB12_mathematische Aussagen_Loesung
- 3_AB13_mathematische Beweisversuche (AB 1.3)
- 3_AB13_mathematische Beweisversuche_Loesung
- 4_AB14_HA_Innenwinkelsumme (AB 1.4)
- 4_AB14_HA_Innenwinkelsumme_Loesung

**Zentrale Inhalte der Unterrichtsstunde (90 Minuten)**

In dieser ersten Unterrichtsstunde erhalten die Schüler:innen einen Einblick in die Thematik „Beweise in der Mathematik“ und lernen zunächst kennen, was mathematische Aussagen sind und wie Beweise für diese aussehen können. Sie setzen sich in expliziter Form mit mathematischen Beweisen als Objekte auseinander. Die Schüler:innen erkennen, dass mathematische Beweise ganz unterschiedlich aussehen können, gleichzeitig aber bestimmte Kriterien erfüllen müssen, um als gültig akzeptiert werden zu können. Zum Ende der Unterrichtsstunde wird die Frage aufgeworfen, wie sich solche Kriterien formulieren lassen, anhand derer entschieden werden kann, in welchen Fällen es sich um einen gültigen mathematischen Beweis handelt und in welchen nicht.

**Lernziele**

Die Schüler:innen …

- charakterisieren mathematische Beweise und deren Stellenwert in der Mathematik, indem sie Aspekte nennen wie
    - *Mithilfe von Beweisen können Aussagen auf ihre Korrektheit überprüft werden.*
    - *Beweise bilden die Grundlage für mathematische Diskussionen.*
    - *Erklären durch logische Schlussfolgerungen, warum Aussagen wahr oder falsch sind.*
    - *Beweise helfen, neues Wissen in den theoretischen Kontext der Mathematik einzubinden.*
    - *Beweise helfen Zusammenhänge in der Mathematik und behandelte Sachverhalte besser zu verstehen.*
    - *Beweise helfen, neues Wissen angemessen zu kommunizieren.*
- erkennen in einer mathematischen Aussage die Voraussetzungen und die Behauptung.
- geben an, dass mehrere korrekte mathematische Beweise für eine Aussage geben kann.
- geben zwei Beweise für die Gauß’sche Summenformel in eigenen Worten wieder.

**Verlaufsplanung**

| Zeit* | Phase<br>Sozialform | L-S-Aktivitäten / Handlungsverlauf | Medien/<br>Materialien | Anmerkungen |
|---|---|---|---|---|
| 2 | Begrüßung | | | |
| 2 | UG | L und S organisieren sich. Ggf. kurzer Hinweis darauf, dass im Laufe des Halbjahres insgesamt vier Unterrichtsstunden zum Thema „Beweisen im Fach Mathematik“ folgen. | | Ein schneller Beginn ist erwünscht. |
| 29 | **Instruktion Beweise im Fach Mathematik** | | | |
| | <u>Erarbeitung 1</u> | | | |
| 3 | UG | L stellt S eine mathematische Aussage vor (*Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ergibt* $n^2$.). S sollen angeben, ob sie die Aussagen für korrekt oder falsch halten. (*Ist diese mathematische Aussage korrekt oder falsch?)* | 1_PPP für Einstieg (Folie 1) | Stimmungsbarometer durch Meldung<br><br>*Hinweis: Aussage ist korrekt (s.u.)* |
| 10 | EA, PA, UG | L fordert S auf, in TPS über Begründungsansätze nachzudenken. (sinngemäß: „*Wie könnte man diese Aussage mathematisch korrekt begründen?“)*<br>Bei Schwierigkeiten: L präsentiert S die Begründungsansätze, S denken über die präsentierten Ansätze nach und bewerten diese.<br><br>*Ziel des UGs*: Herausarbeiten, dass es für eine mathematische Aussage mehrere Begründungsansätze geben kann. Für eine Allgemeingültigkeit gibt es gewisse Forderungen, die in *mathematischen Beweisen* erfüllt sind. (Mathematische Beweise bilden die Grundlage für allgemein akzeptierte Nachweise für den Wahrheitsgehalt von Aussagen.) S sollen im Folgenden eine erste Idee davon bekommen, was math. Beweise eigentlich sind und was sie für die Mathematik leisten können. | 1_ PPP für Einstieg (Folie 2)<br><br>1_ PPP für Einstieg (Folie 3) | TPS<br><br>Folie 3 erst anführen, wenn Schwierigkeiten bei S auftreten. **(Begründungsansätze müssen an dieser Stelle nicht im Detail besprochen werden. Wichtig ist hier zunächst das Ziel des UG!)**<br>*Begründungsansatz 1: korrekt*<br>*Begründungsansatz 2 falsch*<br>*(wird hier nicht diskutiert; detaillierte Hinweise zur Lösung s.u.)*<br>Ggf. erneutes TPS bei Schwierigkeiten der S.<br><br>(Ausblick: für math. Beweise sind festgelegte Kriterien notwendig, um die es im weiteren Verlauf der Intervention gehen soll.) |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 8 | EA | Verteilt AB1.1<br><br>L spielt Instruktionsvideo ab, Auftrag für S auf AB 1.1. | AB 1.1<br><br>Video | (Video max. zwei Mal abspielen) |
| | <u>Sicherung 1</u> | | | |
| 8 | UG | L fordert S, auf die Hauptaussagen des Videos zusammenzufassen und notiert diese an der Tafel. S können Nachfragen stellen. Diskussionen zulassen. | Tafel o.ä. | **Hinweis zum Plakat**: Ergebnisse dieser Sicherung 1 ist die Grundlage für den ersten Teil des Plakats zu Beginn der zweiten Unterrichtsstunde (vgl. gelbe Karten *Plakat_Struktur*) |
| 26 | **Übung zu mathematischen Aussagen** | | | |
| | <u>Erarbeitung 2</u> | | | |
| 1 | UG | L (sinngemäß): „*Wir haben bereits festgestellt, dass Beweise genutzt werden, um die Gültigkeit von Aussagen zu zeigen. Bevor wir uns aber mathematische Beweise genauer anschauen wollen: Wie sehen diese Aussagen aus?*“<br><br>S erhalten den Auftrag, AB 1.2 zu Aussagen mit Voraussetzung und Behauptung zu bearbeiten. Dabei sagt die L zu Beginn, dass hier nur Implikationen betrachtet werden, es aber noch andere Aussagetypen gibt, wie etwa Äquivalenzaussagen. | | Aussage der L bildet die Überleitung zu dieser Phase. |
| 15 | EA/PA/KG | S bearbeiten die Aufgabenstellungen auf dem AB.<br>L steht unterstützend zur Seite. | AB 1.2 | S wählen Sozialform selbst. |
| | <u>Sicherung 2</u> | | | |
| 10 | <u>UG</u> | AB 1.2 wird im Plenum besprochen und verglichen. Fragen werden geklärt. Einige der selbst erstellten Aussagen werden besprochen. | AB 1.2<br>Tafel o.ä. | *Hinweise zur Lösung s.u.*<br><br>**Hinweis zum Plakat**: Ergebnisse dieser Sicherung 2 ist die Grundlage für den zweiten Teil des Plakats zu Beginn der zweiten Unterrichtsstunde (vgl. blaue Karte *Plakat_Struktur*) |
| 30 | **Erste mathematische Beweise** | | | |
| | <u>Erarbeitung 3</u> | | | |
| 2 | UG | Einleitung, dass nachfolgend Beweise zu einer mathematischen Aussage betrachtet werden (sinngemäß): „*Nachdem wir geschaut haben, wie mathematische Aussagen aufgebaut sein können, wollen wir uns nun nochmal genauer anschauen, wie Beweise aussehen können.*“ | | Überleitung zur letzten Phase durch L. |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 15 | EA/PA/KG | S bearbeiten das AB 1.3. L steht unterstützend zur Seite. | AB 1.3 | |
| 10 | UG | AB 1.3 wird besprochen. S erklären die Beweise in eigenen Worten. Diskussion über Gültigkeit der Beweisversuche. Nachfragen werden beantwortet. | AB 1.3 | *Beweisversuch 1: korrekt*<br>*Beweisversuch 2: falsch*<br>*Beweisversuch 3: falsch*<br>*(detaillierte Hinweise zur Lösung s.u.)* |
| | <u>Sicherung 3</u> | | | |
| 3 | UG | *Ziel des UGs:* Aspekt, dass es unterschiedliche Beweisversuche für eine Aussage geben kann, soll herausgestellt werden. Einzelne Beweisversuche können zwar überzeugend sein (*Wenn es für einige Beispiele gilt, glaube ich an die Gültigkeit der Aussage.*), genügen aber ggf. nicht den Anforderungen, die an einen gültigen mathematischen Beweis gestellt werden. | AB 1.3<br>Tafel o.ä. | |
| 3 | **Abschluss** | | | |
| 2 | UG | L gibt Ausblick auf folgende Interventionsstunden, bei denen betrachtet wird, wann ein Beweis falsch/richtig ist bzw. welche Kriterien ein mathematischer Beweis erfüllen muss, um als gültig/akzeptabel zu gelten. | | **Hinweis zum Plakat**: Diese Fragestellungen werden zu Beginn der zweiten Unterrichtsstunde auf dem Plakat ergänzt (vgl. grüne/rote Karte *Plakat_Struktur*) |
| 1 | UG | L verweist auf die verpflichtende HA in nächster Unterrichtsstunde. | AB 1.4<br>(Hausaufg.) | |
| Didaktische Reserve | | | | |
| | frei wählbar | S versuchen einen Beweis zur Aussage aus dem Einstieg zu erarbeiten. | | |

*in Minuten. Tafel steht hier stellvertretend für alle möglichen tafelähnlichen dynamischen Präsentationsmedien. Abkürzungen: L=Lehrkraft, S=Schüler:innen, PM=Präsentationsmedien, AB=Arbeitsblatt, P=Plenum, (fe)UG= (fragend-entwickelndes) Unterrichtsgespräch, EA/PA/KG=Einzel-,Partner,-Kleingruppenarbeit, TPS=Think-Pair-Share

**Weiterführende Informationen zu den Lösungen**

Begründungsansätze für *Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ergibt $n^2$.* (Erarbeitung 1)

- Die **Stunde beginnt** damit, dass die Schüler:innen entscheiden sollen, ob die Aussage „Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ergibt $n^2$." wahr oder falsch ist. Es soll eine Diskussion folgen, in der die SuS Lösungsansätze/Begründungsansätze für die Gültigkeit der Aussage nennen und präsentieren. Die Aussage ist wahr. Im Anschluss wird herausgearbeitet, dass es verschiedene Ansätze gibt, um zu begründen, dass eine Aussage wahr oder falsch ist. Es kann auf verschiedene vorbereitete Begründungsansätze zurückgegriffen werden. Nr. 1 kann als gültiger Begründungsansatz gesehen werden. Auch wenn es beispielgebunden wird, wird auf die Verallgemeinerung dieses Vorgehens verwiesen. Nr. 2 bleibt bei einzelnen Beispielen. Ein Begründungsansatz, der vollständig auf Beispielen basiert ist jedoch nicht zulässig, da diese nicht die Allgemeingültigkeit der Aussage begründen (kein Beweis). Anhand der vorgegebenen oder von den Schüler:innen generierten Begründungsansätzen und der darauffolgenden Diskussion soll herausgearbeitet werden, dass es zwar verschiedene Begründungsansätze geben kann, es für die Allgemeingültigkeit aber einen mathematischen Beweis braucht, der gewisse Kriterien erfüllen muss.

Übung zu mathematischen Aussagen (Erarbeitung 2)

- Im **zweiten Abschnitt der Stunde** werden mathematische Aussagen thematisiert. Grundlegend bestehen diese Aussagen jeweils aus einer Voraussetzung und einer Behauptung. Aussagen können dabei wahr oder falsch sein. Es ist weiter zu beachten, dass bei wahren Aussagen die Behauptung meist nur unter den in der Aussage gegebenen Voraussetzungen korrekt ist und mit anderen Voraussetzungen falsch ist.
- Zur Übung des Umgangs mit mathematischen Aussagen erhalten die Schüler:innen die Aufgabe die Voraussetzung und Behauptung verschiedener Aussagen zu identifizieren. Dazu werden folgende Aussagen thematisiert:
  - *Das Quadrat einer geraden natürlichen Zahl n ist ungerade.*
    - Die Voraussetzung ist hier, dass eine gerade natürliche Zahl n betrachtet wird. Weiter wird behauptet, dass ihr Quadrat $n^2$ ungerade ist. Diese Aussage ist falsch.
  - *Es gilt 1=2, wenn man durch 0 teilen darf.*
    - Diese Aussage ist eine klassische „wenn-dann"-Aussage. Ihr Voraussetzung ist, dass die mathematische Operation „durch 0 teilen" erlaubt ist. In der Aussage wird behauptet, dass dann 1=2 gilt. Diese Aussage ist korrekt.
  - *Jede durch 6 teilbare Zahl x ist gerade.*
    - Die Aussage setzt voraus, dass eine Zahl x durch 6 teilbar ist und behauptet, dass x dann gerade ist. Diese Aussage ist korrekt.

- *Jedes gleichschenklige Dreieck ABC ist gleichseitig.*
    - Als Voraussetzung wird formuliert, dass ein gleichschenkliges Dreieck ABC betrachtet wird und es wird behauptet, dass dieses auch gleichseitig ist. Da schnell ein Gegenbeispiel formuliert werden kann, ist die Aussage falsch.

- Weiter werden die Schüler:innen aufgefordert, selbst eine Aussage mit Voraussetzung und Behauptung zu formulieren. Hierbei ist darauf zu achten, dass die Aussagen tatsächlich diese Struktur aufweisen. Es werden in dieser Aufgabe nur Aussagen in Form von Implikationen angesprochen und auf z.B. Äquivalenzaussagen verzichtet.

Erste mathematische Beweise (Erarbeitung 3)

- In der **letzten Phase der Stunde** werden konkrete Beweisversuche der Gauß'schen Summenformel betrachtet. Dabei wird nicht der symbolische Induktionsbeweis geführt, da dieser das Einstiegsniveau deutlich überschreitet. Die Schüler:innen sollen die angegebenen Beweisideen zunächst verstehen, sodass diese in eigenen Worten widergegeben werden können. Dabei wird herausgestellt, dass es verschiedene Beweisideen für die gleiche Aussage geben kann, es aber auch Grenzen für Beweise gibt, wie zum Beispiel der Beweis durch Beispiele.
- Der **erste (korrekte) Beweisversuch** stellt die Situation der Gleichung $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n}{2} \cdot (n + 1)$ mittels Kästchen dar. Durch die Verdopplung der Kästchen und Zusammenpacken entsteht ein Rechteck mit $n \cdot (n + 1)$ Kästchen. Schließlich muss aufgrund der Verdopplung durch 2 geteilt werden. Der **zweite (falsche) Beweisversuch** nutzt als Argument, dass eine "normale" und eine "besondere" Zahl (hier 4 und 11 als Primzahl) betrachtet wird und der Beweis durch Durchrechnen dieser Ergebnisse geliert wird. Der **dritte (falsche) Beweisversuch** führt eine algebraische Begründung, indem die Summe $(1 + 2 + \cdots + n)$ umsortiert wird zu $(n + 1) + (n + 1) + \cdots$ . Die n Summanden werden halbiert, sodass schließlich noch durch 2 geteilt werden muss. Da diese Umsortierung nur für gerade n, aber nicht für ungerade n gilt, ist der Beweis im Allgemeinen inkorrekt.